John Neper i el naixement dels logaritmes

Edimburg 1550–1617

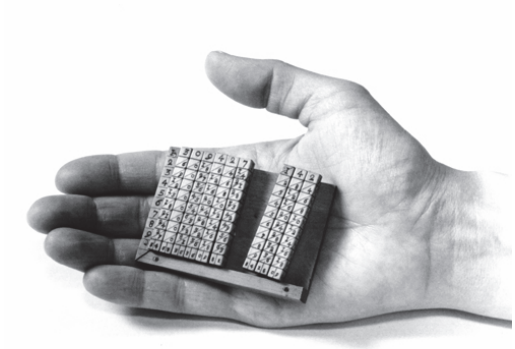
Recordo dels meus primers anys de batxillerat (d'això ja en fa cinquanta!), sentir a parlar els més grans sobre els logaritmes amb temor i reverència; temor per una certa dificultat en la seva comprensió, i reverència per una tècnica que transformava multiplicacions en sumes i divisions en restes, de manera quehom podia atrevir-se amb les enrevessades fórmules de la trigonometria i el càlcul mercantil. A tot aquest assumpte del càlcul amb logaritmes se li donava molta importància i recordo molt bé un examen només dedicat a la resolució de triangles fent ús de les taules de logaritmes. Les taules de logaritmes eren uns llibrets on es donava la correspondència entre una successió de nombres i els seus logaritmes en base deu, i, si hom necessitava el logaritme d'un nombre que no estava a les taules, havia de fer una regla de tres. Més endavant, en aquells cursos de batxillerat, s'introduïa el nombre e, els logaritmes que tenien per base aquest nombre e, els quals anomenàvem *neperians*, i la funció logarítmica; però tota aquesta part tenia un caire ben diferent d'aquell feixuc treball amb les taules de logaritmes.

Durant els meus estudis de llicenciatura en matemàtiques no vaig haver de fer servir mai les taules de logaritmes, però, acabada la carrera, vaig haver de fer el servei militar (llavors obligatori) i, ves per on, una altra vegada vaig haver de tornar a les taules per calcular angles i distàncies en el tir artiller; això passava l'any 1975 i, tot i que ja circulaven les primeres calculadores de butxaca, l'exèrcit espanyol continuava amb taules de logaritmes. Val a dir també que recordo d'aquell mateix temps una gran part del professorat de matemàtiques dels instituts d'ensenyament mitjà oposant-se a l'ús de les calculadores a les classes.

En pocs anys, però, les coses van canviar i el canvi es va accelerar quan es van començar a comercialitzar a bon preu les calculadores científiques de butxaca. Va ser tal el canvi que, l'any 1997, any en què vaig començar a impartir cursos d'història de la matemàtica, en parlar del segle XVII vaig ressaltar el gran impacte que havia tingut entre els astrònoms la invenció dels logaritmes ja que reduïa notablement el temps emprat en els càlculs. Vaig afegir que, amb molt d'encert, Laplace havia comentat que "amb la reducció del treball de diversos mesos de càlcul a uns pocs dies, la invenció dels logaritmes semblava haver duplicat la vida dels astrònoms". En aquella classe sobre història dels logaritmes a mi em va impactar la cara de sorpresa que posaven els alumnes per la gran importància que jo estava donant als logaritmes com a eina de càlcul; llavors em vaig adonar que ells mai havien fet servir taules de logaritmes per fer multiplicacions i divisions, ni tan sols n'havien vist mai cap. A la següent classe els en vaig portar unes quantes i els vaig explicar com funcionaven, ho van escoltar amb molta atenció i, encuriosits, van voler practicar-ho. Però allò no va ser més que un exercici de classe d'història de la matemàtica, quedava clar que l'ús de les taules de logaritmes per fer llargues multiplicacions i divisions "ja havia passat a la història"... No s'ha d'oblidar, però, que va ser precisament l'afany de buscar procediments per alleugerir els càlculs dels astrònoms el que va motivar la invenció dels logaritmes.

John Neper (Edimburg, 1550–1617).

Aquest invent del logaritme, i la mateixa paraula, és obra de John Neper (també Napier), un escocès nascut l'any 1550 a Edimburg. Neper no era matemàtic de professió sinó un aficionat a les matemàtiques que estava especialment interessat a trobar vies que facilitessin els càlculs. Certament, la més important va ser la invenció dels logaritmes però també fou útil, per exemple, una regla mnemotècnica coneguda com el *pentàgon de Neper*, que servia per recordar les fórmules de resolució de triangles rectangles esfèrics. També va construir diversos artefactes; el més popular va ser el que es coneix com *ossos de Neper*, que consistia en un conjunt de nou varetes cadascuna de les quals portava escrita, de manera peculiar en cadascuna de les seves quatre cares, una de les taules de multiplicar. Quan hom havia de fer una multiplicació, primerament escollia les varetes adequades, les posava en renglera una al costat de l'altra i després, seguint unes certes indicacions, només li calia fer sumes per tal d'obtenir el resultat de la multiplicació. Aquests *ossos de Neper* tingueren molt d'èxit entre tots aquells que no havien de fer llargs càlculs astronòmics (per càlculs llargs s'havia de recórrer als logaritmes).



Els ossos de Neper.

Avui dia diem que m és el logaritme en base a de b, i escrivim $m = \log_a b$, si $a^m = b$. Però Neper en va donar una definició ben diferent, que detallaré en el següent paràgraf, i ja avanço que els logaritmes que va construir no són pas els logaritmes que avui anomenem neperians. Si amb Lnep indiquem els logaritmes construïts per Neper, el Lnep d'un nombre x té el següent lligam amb els logaritmes d'avui dia:

$$\operatorname{Lnep} x = 10^7 \log_{e^{-1}} \frac{x}{10^7}.$$

El factor 10^7 el va introduir Neper per tal d'evitar llargues parts fraccionàries. S'ha de tenir en compte que en el mateix període que Neper estava elaborant la seva teoria de logaritmes, cap a finals del segle XVI, l'enginyer Simon Stevin de Bruges publicava *De Thiende* (1585), el llibret que ensenyava com escriure la part fraccionària d'un nombre amb decimals i com calcular amb aquests decimals. Per tant, a finals del segle XVI, els europeus encara no estaven massa acostumats a treballar amb decimals i intentaven evitar-los. El 10^7 de Neper assegurava que la part entera dels nombres que utilitzaria tindria 7 dígits, però aquest factor 10^7 li afectava la propietat fonamental dels logaritmes, que quedava de la manera següent:

$$\operatorname{Lnep} \frac{ab}{10^7} = \operatorname{Lnep} a + \operatorname{Lnep} b,$$

$$\operatorname{Lnep} \left(10^7 \frac{a}{b}\right) = \operatorname{Lnep} a - \operatorname{Lnep} b.$$

Aquest 10^7 implica, a l'hora dels càlculs, haver de fer córrer la coma amunt i avall, i això és certament incòmode. Neper va publicar les seves taules de logaritmes el 1614 (feia 20 anys que hi treballava) i, a l'any següent, l'estiu del 1615, Henry Briggs, professor al Gresham College de Londres, va anar a Edimburg per visitar Neper i proposar-li alguns canvis en la seva construcció dels logaritmes. Briggs li va venir a dir que, de cara a la pràctica del càlcul, seria més convenient utilitzar potències de deu. Neper ho va acceptar d'immediat perquè, segons li va comunicar, ell ja tenia pensat fer-ho. Però també li va comunicar que no tenia prou salut com per a embrancar-se en aquella tasca, i varen convenir que ho fes el mateix Briggs. El nou sistema de logaritmes es va construir de manera que es complís que el logaritme de 1 fos 0, i que el logaritme de 10 fos 1, amb la qual cosa les propietats fonamentals dels logaritmes quedaven com les coneixem avui dia,

$$\log(ab) = \log a + \log b,$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b,$$

alliberades d'aquell molest 10^7. En definitiva s'havien construït allò que avui anomenem els logaritmes vulgars o de Briggs, és a dir, els logaritmes en base 10. Aquests van ser els logaritmes que van tenir ràpida i àmplia divulgació arreu d'Europa. Astrònoms, cartògrafs, navegants, topògrafs, banquers i multitud d'estudiants els han fet servir des del segle XVII fins

l'aparició de les calculadores científiques a l'última part del segle XX.

S'ha d'afegir que, per la mateixa època en què Neper, a Escòcia, construïa la seva taula de logaritmes, a Suïssa el fabricant de rellotges Jobst Bürgi també estava elaborant un sistema de correspondència de nombres molt semblant al dels logaritmes de Neper. D'una banda, quan l'any 1620 Bürgi va publicar les seves taules ja en feia sis que Neper havia publicat les seves i, d'altra banda, l'èxit que per tot Europa estava aconseguint el sistema de Neper-Briggs, va arraconar i deixar en l'oblit el sistema de Bürgi; tot i que segons diuen alguns estudiosos del tema, Bürgi havia començat a treballar-hi abans que Neper ho fes amb els logaritmes; un tema difícil aquest de les prioritats.

Definició de Neper d'allò què és un logaritme i perquè els va inventar

Al segle XVI, astrònoms, navegants, cartògrafs, topògrafs i contables s'havien d'encarar a llargues multiplicacions, divisions, arrels i potències que comportaven molt de temps i molts errors. Es feia doncs urgent trobar camins que permetessin alleugerir els càlculs. Amb aquest propòsit és força natural que d'antuvi hom busqués alguna manera enginyosa de poder evitar les multiplicacions i les divisions, buscant camins alternatius en què només s'hagués de sumar o restar. En aquest sentit, els astrònoms del segle XVI utilitzaven un mètode anomenat *prostaphairesis*, que consistia a utilitzar certes identitats geomètriques que igualen productes amb sumes. Així, per exemple, per fer la multiplicació 80765×97803 podien utilitzar la fórmula $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$. Amb l'ajut d'unes taules trigonomètriques, buscaven els angles A i B tals que $2\cos A = 80765$ i $\cos B = 97803$; una vegada coneguts A i B només calia acudir de nou a les taules per trobar el $\cos(A+B)$, el $\cos(A-B)$ i sumar-los.

Utilitzant taules actuals hauríem de posar $\cos A = 0.80765$, $\cos B = 0.97803$ i fer les correccions oportunes. Però, en aquella època, els sinus i els cosinus d'un angle no eren raons trigonomètriques, encara no s'havia introduït la divisió pel radi. Els sinus i els cosinus eren línies trigonomètriques la longitud de les quals es mesuraven en funció d'una part del radi que cada autor escollia com més li convenia; de fet, els hi interessava que la part que havia de servir d'unitat de mesura fos ben petita, així evitaven molestes parts fraccionàries. Amb aquesta manera de procedir els valors trigonomètrics variaven segons les taules emprades. Si, per exemple, un constructor de taules trigonomètriques decidia dividir el radi en 100.000 parts, ho indicava al començament de les seves taules dient que el valor del *sinus totus* era de 100.000; llavors, amb aquesta valoració del radi, el valor del cosinus d'un cert angle A podia ser perfectament el 80.765 que he utilitzat en l'exemple de la prostaphairesis.

Quan Neper construí les seves taules de logaritmes, ho féu pensant en els astrònoms, de manera que els logaritmes que escrivia a les taules eren logaritmes de línies trigonomètriques; i el 10^7 que surt en els càlculs de Neper correspon al valor que ell va atribuir al *sinus totus*. El mètode de prostaphairesis abreuja només lleugerament els càlculs, com el mateix lector pot comprovar si té prou paciència per aplicar-lo. Calia doncs trobar altres mètodes més eficaços i aquí és on entra Neper (i també Bürgi).

No es coneix quina va ser la formació matemàtica de Neper, però hom pensa que d'alguna manera havia de conèixer la propietat bàsica en què es fonamenta el càlcul logarítmic: *si una colla de nombres estan en progressió geomètrica, llavors el producte de dos qualssevol d'ells es troba dins la mateixa progressió geomètrica i, allò que és més important, el lloc que aquest producte ocupa en la progressió resulta ser la suma dels llocs que ocupen els factors*. Una propietat que es troba, per exemple, a l'*Arithmetica integra* (1544) de Stifel però que ja era coneguda des d'Arquimedes i segurament abans, pels babilònics per exemple. Aquesta propietat de les progressions geomètriques es fa evident si hom observa els dos arrenglerament següents, i és aquí on a hom se li pot ocórrer que una tal correspondència ordenada es pot fer servir per transformar multiplicacions en sumes:

2	4	8	16	32	64	128	256	512	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

Però encara que la idea és bona, no és gens pràctica si el que fem és utilitzar una progressió geomètrica de raó 2, ja que els nombres de la progressió queden massa separats. Cal una raó

molt pròxima a 1 per tal d'obtenir una progressió geomètrica de nombres sense massa espai entre ells i així no haver de fer interpolacions salvatges a l'hora del càlcul. Això és precisament el que van fer Neper i Bürgi. Neper va fer servir com a raó de la progressió geomètrica un nombre lleugerament inferior a 1, concretament el nombre $0,9999999 = 1 - 10^{-7}$ i Bürgi, en canvi, va fer servir com a raó de la progressió geomètrica un nombre lleugerament superior a 1, concretament el nombre $1,0001 = 1 + 10^{-4}$. Com ja he comentat, Neper va multiplicar els termes de la progressió geomètrica pel factor 10^7 per tal d'evitar decimals tant com fos possible; d'aquesta manera li va quedar la progressió de terme general $10^7(1 - 10^{-7})^n$.

Per finalitzar aquest paràgraf, esmentaré la definició que va donar Neper d'allò que per a ell era el logaritme d'un nombre, i ja avanço que sorprèn molt, ja que no ho va fer en termes numèrics de progressions geomètriques sinó que es va servir del model geomètric–cinemàtic següent: Neper considera un segment rectilini AB i una semirecta amb origen C. Un punt mòbil X surt del punt A cap al punt B amb una certa velocitat v_0 al mateix temps que un punt mòbil Y surt del punt C seguint la semirecta amb la mateixa velocitat inicial que el mòbil X. En aquest recorregut la velocitat del mòbil X és una variable que decreix de manera proporcional a la distància que li falta per arribar al punt B, mentre que la velocitat del mòbil Y és constantment igual a la inicial de sortida. Neper defineix la distància variable CY com el logaritme de la distància variable XB.

Neper va demostrar ser molt perspicaç en elegir aquest model geomètric–cinemàtic per definir els logaritmes en un temps, finals del segle XVI, en què encara no es parlava ni de funcions, ni de continuïtat, ni de nombres reals, ... i amb prou feines hi havia bones notacions per als conceptes coneguts; només un model cinemàtic podia establir una correspondència funcional contínua entre dos continus de nombres reals.

És un bon exercici trobar la relació que hi ha entre el logaritme definit per Neper i els logaritmes que avui fem servir. Per portar a terme aquest propòsit cal atribuir longitud 10^7 al segment AB i suposar que la velocitat inicial dels mòbils és també 10^7 (aquest valor de 10^7 és el que Neper va assignar al *sinus totus*). Llavors, amb aquestes condicions inicials, s'ha de resoldre el senzill sistema format per les dues equacions diferencials següents $\frac{dx}{dt} = -x$ i $\frac{dy}{dt} = 10^7$. Si ho fem obtindrem la relació buscada

$$\mathrm{Lnep}\, x = y = 10^7 \log_{e^{-1}} \frac{x}{10^7}.$$

Una vegada establert aquest model continu geomètric–cinemàtic, Neper, a l'hora de calcular les taules, va haver d'escalonar el moviment i per això va imaginar que els mòbils feien el seu recorregut seguint una successió de moviments uniformes que tenien lloc en petits intervals de temps $t = 10^{-7}$. Això equivalia a calcular els termes d'una progressió geomètrica decreixent de raó 0,9999999.

Per crear la paraula *logaritme*, Neper va amalgamar dues paraules gregues: *logos*, que vol dir raó, i *arithmos* que vol dir nombre. Així doncs la paraula *logaritme* resumeix una expressió com aquesta: "els nombres corresponents a uns altres que estan en progressió geomètrica segons una certa raó". Abans de crear aquesta paraula Neper parlava de *nombres artificials*.

Portada del llibre *Mirifici logarithmorum canonis descriptio.*

Neper va morir l'any 1617, havia començat a treballar aquest assumpte pels voltants de

1590 i les primeres taules de logaritmes van ser publicades en llatí l'any 1614 en un llibre que porta per nom *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (descripció de l'admirable regla dels logaritmes). El 1616 se'n va publicar una traducció a l'anglès. Més tard, el 1619, es va publicar *Mirifici logarithmorum canonis constructio*. Aquest llibre, encara que aparegut després, va ser redactar abans que el primer i conté les explicacions de Neper de com ho va fer per calcular els logaritmes.

Algunes pinzellades de la vida de Neper

John Neper va néixer el 1550 en una petita torre situada a Merchiston, uns terrenys propers a l'antiga ciutat d'Edimburg i que avui formen part de la Universitat d'aquesta ciutat, universitat que, per raons òbvies, s'anomena Napier University. Neper era fill d'una família de nobles ben arrelada a aquelles terres escoceses (encara avui hi ha el clan dels Napier) i ell era el "baró de Merchiston". De la seva infància no se'n sap res, i de la seva vida en general poques coses. Se sap que quan tenia 13 anys va marxar per anar a estudiar a la Universitat de St. Andrews i que, poc després, va viatjar al continent per ampliar estudis. Però no se sap ni on va anar, ni què va estudiar, ni de qui va prendre lliçons. El 1571, quan tenia 21 anys, va tornar a Escòcia i ja s'hi va quedar. Es va casar l'any següent amb Elizabeth Stirling, el matrimoni vivia en un castell situat en un terreny dels Neper anomenat Gartnes, un lloc tranquil a prop del llac Lommond. Amb Elizabeth va tenir un fill i una filla però, després de vuit anys Elizabeth va morir. Neper es va tornar a casar, ara amb Agnes Chisholm, i amb ella va tenir cinc fills i cinc filles.

Neper, posseïdor de grans terrenys, havia de cuidar-los i administrar-los, però quan no estava ocupat amb aquestes tasques que li eren pròpies es dedicava a cultivar les seves dues grans aficions, la teologia i les matemàtiques. Sembla que tot ho feia amb molta cura i s'explica que sempre estava experimentant amb noves formes de treballar la terra de millorar-ne el rendiment, també que va construir artefactes per controlar l'aigua dels regadius. Per la gent que més el coneixia, Neper era una persona sabia i enginyosa, però per la gent que no el coneixia era un personatge estrafolari, sempre vestit amb capa i caputxa negres a més de tenir un pollastre, també negre, com a animal de companyia; fins i tot es preguntaven si no era un bruixot. Hom pot llegir en diferents llocs divertides anècdotes sobre els estranys costums i comportaments de Neper.

Neper va haver de viure temps molt convulsos de la història d'Escòcia, un regne que, tot i ser independent, estava constantment sota la mirada atenta d'Anglaterra, que volia annexionar-se'l. Per aquest motiu, i per sentir-se més protegits, els reis i reines escocesos sempre buscaven aliances amb França, però la noblesa i el poble en general estaven cansats de les exigències tributàries de la casa reial, dels privilegis concedits als estaments catòlics i, sobretot, de les tropes franceses que hi havia per Escòcia; molts d'ells pensaven que els seria més convenient aliar-se amb els anglesos. L'ambient era tens i moltes vegades hi havia violents enfrontaments. John Knox, un escocès deixeble de Calví, va proposar canviar l'oficialitat del catolicisme per una nova forma de protestantisme anomenat presbiterianisme (1560).

En els temps del Neper adult, Escòcia era oficialment presbiteriana, encara que es permetia el culte catòlic. Neper es va posar al costat dels protestants, n'era un assidu practicant i un defensor a ultrança, com va mostrar en diferents ocasions. Una gran part del seu temps el dedicava als assumptes religiosos, el 1588 va ser anomenat comissionat de l'Assamblea de l'Església d'Escòcia i també va escriure un llibre per comentar l'Apocalipsi de Sant Joan, un obscur text bíblic que fins i tot Calví havia admès que no entenia. El llibre de Neper, que portava per títol *Plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John*, va aparèixer el 1593 i està dividit en dues parts. La primera part consisteix en una defensa del protestantisme en front del catolicisme, i la segona part conté els comentaris de Neper a cadascun dels versos del llibre de la *Revelació de Sant Joan*. Pel que fa a les matemàtiques, el primer llibre té la singularitat que està escrit seguint el model deductiu dels *Elements* d'Euclides: a partir d'uns postulats elegits per ell, demostra trentavuit proposicions en les quals arriba a resultats tan estrambòtics com el de la proposició catorzena, on estableix que el dia del judici final serà un dels dies compresos entre els anys 1688

i 1700; també conclou que el papa de Roma era l'Anticrist.

A propòsit d'uns rumors que corrien sobre una nova invasió d'Anglaterra per part de la catòlica Espanya, després de la derrota de l'Armada Invencible el 1588, Neper va imaginar-se un nou atac de catòlics contra protestants i d'aquí que, com Arquimedes havia fet a Siracusa, pensés a fabricar tota una colla d'enginyosos artefactes defensius, miralls, peces d'artilleria, carros blindats i fins i tot un vaixell que navegava sota l'aigua. De tots aquest invents en va informar per carta secreta el 1596 al govern d'Anglaterra, però aquests artefactes mai van ser provats ja que mai va haver-hi cap invasió dels temibles catòlics espanyols. El 1608 va morir el pare de Neper i llavors Neper va decidir tornar a Edimburg, a la torre de Merchiston, on viuria l'última dècada de la seva vida. Va ser en aquest lloc on, l'estiu del 1615, es va reunir amb Briggs per projectar una nova taula de logaritmes. El 4 d'abril de l'any 1617, als 67 anys, moria John Neper.

Un dels primers astrònoms que va utilitzar els logaritmes per abreujar els penosos càlculs de les efemèrides astronòmiques va ser Johannes Kepler.

Lectures per a saber-ne més

Pel que fa a la part logarítmica recomano el capítol 6, titulat "Napier's Wonderful Logarithms", del llibre de C.H. Edwards, Jr. *The Historical Development of the Calculus* de Springer-Verlag. La part biogràfica l'he treta d'un llibret escrit per Lynne Gladstone Millar, publicat l'any 2003 per National Museums of Scotland, i que té per títol *John Napier, Logarithm John*.

Eduard Recasens Gallart
Universitat Politècnica de Catalunya

Webs de matemàtiques

Càlculs simbòlics

Els programes per fer càlculs simbòlics ja tenen una llarga història. Encara que semblin una cosa més moderna, tant Maple com Mathematica van ser publicats per primer cop el 1988, i encara més antic és el *Matlab*. Tots ells gaudeixen d'una salut excel·lent, i continuen publicant versions cada cop més potents i actualitzades avui dia.

Malgrat tot, aquests programes requereixen la instal·lació de programari al teu ordinador (o a un servidor de la xarxa local), i aquest programari pot arribar a costar una bona quantitat de diners. Però amb la generalització de les connexions ultraràpides de banda ampla a Internet, s'obre la possibilitat que els càlculs es duguin a terme en un servidor centralitzat, i qualsevol usuari pugui accedir-hi mitjançant un simple navegador. Els grans avantatges d'això són tant la ubiqüitat, en pots fer ús des de qualsevol ordinador amb navegador, com la independència de la plataforma que l'ordinador faci servir (Windows, Linux o Mac, és irrellevant).

Un dels sistemes de càlcul algebraic simbòlic *online* més coneguts ha estat desenvolupat aquí a casa nostra. Iniciat per un equip de professors i ex-alumnes de la UPC liderats per en Sebastià Xambó, el WIRIS va ser ideat com una eina per a l'ajut a l'educació, amb la possibilitat d'efectuar programes i càlculs complicats des de qualsevol navegador. Avui dia, WIRIS es comercialitza des de l'empresa Maths for More, amb seu central a la Via Augusta de Barcelona. Es pot accedir a una demo de WIRIS al seu web `www.wiris.com`, i una senzilla cerca a Google per la paraula *wiris* us oferirà diverses pàgines on podreu fer càlculs amb WIRIS, tant en català com en castellà com en anglès.

WIRIS és un paquet força útil, encara que la seva utilització no és completament intuïtiva i de vegades es fa difícil saber per què es produeixen els errors que fan que no funcioni (parlo per la pròpia experiència utilitzant-lo a classe). Una particularitat és que les